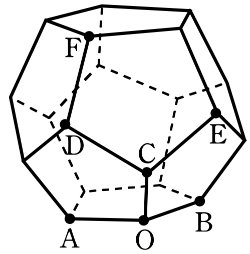
大阪医科薬科大学対策2　　　100分　100点

1 1辺の長さが1の正十二面体を考える。点O，A，B，C，D，E，Fを図に示す正十二面体の頂点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。なお，正十二面体では，すべての面は合同な正五角形であり，各頂点は3つの正五角形に共有されている。



(1) 1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めて，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) Oから平面ABDに垂線OHを下ろす。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。さらにその大きさを求めよ。

2 a，b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の2次方程式

$$x^2+ax+b=0,\quad y^2+by+a=0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a=b$ とするとき，条件を満たす整数 a の値をすべて求めよ。

(2) $a>b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

3 $0<t<3$ のとき，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq y \leqq \sin x \\ 0 \leqq x \leqq t-y \end{cases}$$

の表す領域を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。

$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

4 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ {a_1}^2)$，$\mathrm{A}_2(a_2,\ {a_2}^2)$，$\mathrm{A}_3(a_3,\ {a_3}^2)$，…… を，$\mathrm{A}_{k+2}$ $(k \geqq 1)$ における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし，$a_1<a_2$ とする。三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ。

$\boxed{5}$ 点 P$(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 P$(x,\ y)$ と点 A$(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

(1) $f(a)$ を a で表せ。

(2) $f(a)$ を a の関数とみなすとき，ab 平面上に曲線 $b=f(a)$ の概形をかけ。