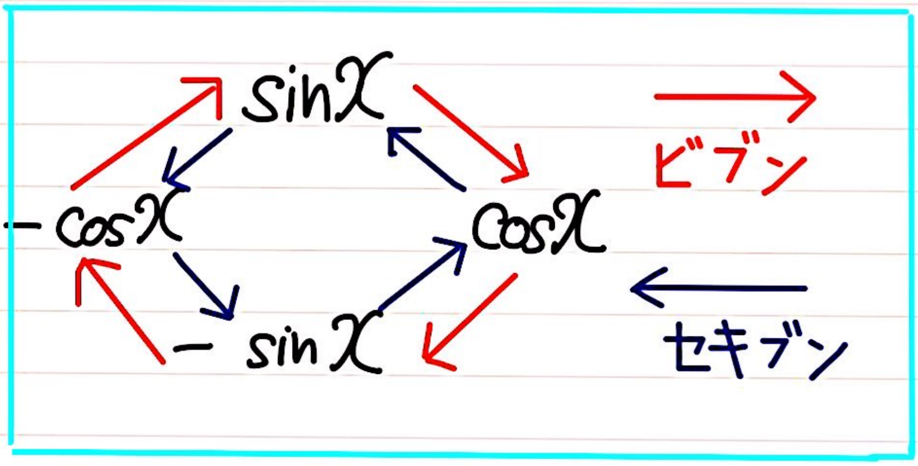
計算ルール　LV1 超基本

- $\int x^{n} dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$　1up
  $(n \neq -1)$

- $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- $\int \cos x \, dx = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x}$

指数関数そのまんま残る

- $\int e^{x} dx = e^{x}$
- $\int a^{x} dx = \frac{1}{\log a} a^{x}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$



LV2 …1次の合成関数

$F'(x) = f(x)$ をみたす関数について

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

1次の係数をココにかけ

1次形

$ax+b$ 形のカタマリを t としてフツーに計算し

$\frac{1}{a}$ を前につける

(ex)

1up

(1) $\int (2x+1)^6\,dx = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^7 + C = \frac{1}{14}(2x+1)^7 + C$

(2) $\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin 5x + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C$

(3) $\int e^{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(4) $\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\log|4x-1| + C$

LV3. 置換積分 。。

$f(x)=t$ とおくなら,完全に t の式,にしないとダメ

(1) $\int (3x+1)^4\,dx$

$t=3x+1 \xrightarrow[x\text{で微分}]{} \dfrac{dt}{dx}=3$, $dx=\dfrac{1}{3}dt$

コイツも t にしないとダメ

$= \int t^4\,dx = \int t^4\,\dfrac{1}{3}dt = \dfrac{1}{3}\int t^4\,dt$

※ t で戦うなら完全に全てを t へ

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}t^5 + C = \underline{\dfrac{1}{15}(3x+1)^5 + C}$

x に復元(※不定積分のみ)

※ 定積分なら t のハンイに 積分区間も変えないとダメ

(2) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

$t=x-1 \xrightarrow[x\text{で微分}]{} \dfrac{dt}{dx}=1$, $dx=dt$

$\xrightarrow[x\text{消去}]{} x=t+1$

$= \int (t+1)\sqrt{t}\,dt = \int (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})\,dt = \dfrac{1}{\frac{5}{2}}t^{\frac{5}{2}} + \dfrac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}} + C$

$= \dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{5}\sqrt{t^5} + \dfrac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \underline{\dfrac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C}$

LV4 頻出型

$$\boxed{\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1}}$$

$t = f(x)$ とおく

xで微分 $\frac{dt}{dx} = f'(x)$, $dx = \frac{dt}{f'(x)}$

$$\therefore \int t^n \cdot \cancel{f'(x)} \cdot \frac{dt}{\cancel{f'(x)}} = \int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$$

1up

$$= \underline{\frac{1}{n+1}(f(x))^{n+1} + C}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|}$$

$t = f(x)$ とおく

xで微分 $\frac{dt}{dx} = f'(x)$, $dx = \frac{dt}{f'(x)}$

$$\therefore \int \frac{\cancel{f'(x)}}{t}\left(\frac{dt}{\cancel{f'(x)}}\right) = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C$$

$$= \underline{\log|f(x)| + C}$$

LV5 易化 部分積分

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

g(x)は主にビブンしてもカンタンにならないカンスジジイをおく。 sin, cos, e^x など

⇨ 上記はノーマルな部分積分であるが、ミスが多いので、単純作業でクリアする。…→ 次頁のテーブル法

(1)
$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx$$
$$= x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx$$
$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

易化

(2)
$$\int x^2e^x\,dx = \int x^2(e^x)'\,dx$$
$$= x^2e^x - \int (x^2)'e^x\,dx$$
$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$
$$= x^2e^x - 2\int x(e^x)'\,dx$$
$$= x^2e^x - 2\left\{xe^x - \int (x)'e^x\,dx\right\}$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

☆テーブル法を用いる → 数をテーブルに並べて作業!

① $f(x)$にあたる式を左
$g'(x)$ 〃 右
にかく

② 左の数が0になるまでビブン
右の数は同じ回数セキブン

③ 左上 → 右下をつなぎ積をとる
(+, −を交互につける)

④ 筆算のように足す

(1) $\int \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,dx$

$f(x)$		$g(x)$		
x	$\oplus$	$\cos x$		
ビブン ↓ 1	$\ominus$	セキブン ↓ $\sin x$	→	$x\sin x$
ビブン ↓ 0	交互	セキブン ↓ $-\cos x$	→	$+\ -1\cdot(-\cos x)$

$$= \boxed{x\sin x + \cos x + C}$$

(2) $\int \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{e^x}_{g'(x)}\,dx$

$f(x)$		$g'(x)$		
ビブン ↓ x^2	$\oplus$	セキブン ↓ e^x		
$2x$	$\ominus$	e^x	→	x^2e^x
2	$\oplus$	e^x	→	$+\ -2xe^x$
0	交互	e^x	→	$+\ 2e^x$

$$= \boxed{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}$$

慣れたらかなりラク

注 log絡み, $\int e^x \sin x\,dx$ タイプは用いないこと

LV6. 典型的なもの

…基本的に 1~5を用いれる形に式そのものを変形することが、これからは求められる。ある程度、この形を見かけたら、どういじるか、は覚えてしまおう。

A. 分数形 … $\dfrac{(\text{整式})}{(\text{整式})}$

① $\dfrac{\text{次数大}}{\text{次数小}}$ のとき、「分子÷分母」で **分子の次数下げ**

② 分母が因数分解できるとき、「部分分数分解」より、**分母の次数下げ**

③ 計算 … 困ったら分母を置換

(ex) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$ ← 3次（分子） ← 2次（分母）

① $x^3 \div (x^2-1) = x \cdots \boxed{x}$

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \underbrace{x}_{\text{商}} + \frac{\overbrace{\boxed{x}}^{\text{余り}}}{\underbrace{x^2-1}_{\text{わる式}}}$$

$$\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

$$(9 \div 4 = 2 \cdots 1)$$

②
$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1+1}{x-1} - \frac{x+1-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x-1} - 1 + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

③ $\dfrac{1}{2}\left(x^2 + \log|x-1| + \log|x+1|\right)$