近大直前演習　　※4は補充問題

$\boxed{1}$

解答　(1)　$b=3,\ c=1$　　(2)　$\mathrm{B}(a,\ 2a+1)$　　(3)　$S_1=\dfrac{1}{12}(a-1)^4$　　(4)　$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{8}{9}$

(1)　曲線 C : $y=f(x)$ は点 A$(1,\ 3)$ を通るから　　$f(1)=3$

すなわち　　$1-(a+2)+2a+b-a+c=3$

整理すると　　$b+c=4$　…… ①

また，$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+b)x-a+c$ から

$$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+2a+b$$

C は点 A において直線 ℓ : $y=2x+1$ と接するから　　$f'(1)=2$

すなわち　　$3-2(a+2)+2a+b=2$　　　　よって　　$b=3$

これと ① から　　$c=1$

(2)　(1) より　　$f(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+3)x-a+1$

点 B の x 座標は，方程式 $f(x)=2x+1$ の 1 以外の実数解である。

$f(x)=2x+1$ を整理すると　　$x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a=0$

すなわち　　$(x-a)(x-1)^2=0$　　　　よって　　$x=a,\ 1$

ゆえに，点 B の x 座標は a であり　　$\mathrm{B}(a,\ 2a+1)$

(3)　C と ℓ で囲まれた部分は $a\leqq x\leqq 1$ の範囲にある。

また，$a\leqq x\leqq 1$ のとき　　$f(x)-(2x+1)=(x-a)(x-1)^2\geqq 0$

よって，$a\leqq x\leqq 1$ の範囲で C は ℓ の上側にあるから

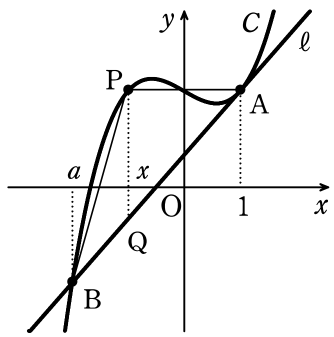
$$S_1=\int_a^1\{f(x)-(2x+1)\}dx=\int_a^1(x-a)(x-1)^2dx$$

$$=\int_a^1\{(x-1)+(1-a)\}(x-1)^2dx=\int_a^1(x-1)^3dx+(1-a)\int_a^1(x-1)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_a^1-(a-1)\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_a^1=-\frac{1}{4}(a-1)^4+\frac{1}{3}(a-1)^4$$

$$=\frac{1}{12}(a-1)^4$$

(4)　P と x 座標が等しいような ℓ 上の点 $(x,\ 2x+1)$ を Q とする。



△PABの面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{PQA}+\triangle\mathrm{PQB}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot(1-x)+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot(x-a)$$

$$=\frac{1}{2}\{(1-x)+(x-a)\}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}(1-a)\cdot\mathrm{PQ}$$

よって，PQ が最大となるときの S の値が S_2 である。

$\mathrm{PQ}=f(x)-(2x+1)$ を $g(x)$ とおくと

$$g(x)=f(x)-(2x+1)=(x-a)(x-1)^2,$$

$$g'(x)=f'(x)-2=3x^2-2(a+2)x+2a+1=(x-1)\{3x-(2a+1)\}$$

$g'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ \dfrac{2a+1}{3}$

$a<\dfrac{2a+1}{3}<1$ であるから，$a<x<1$ における $g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	a	$\cdots$	$\dfrac{2a+1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，$g(x)$ の最大値は

$$g\left(\frac{2a+1}{3}\right)=\left(\frac{2a+1}{3}-a\right)\left(\frac{2a+1}{3}-1\right)^2=\frac{1-a}{3}\cdot\left(\frac{2a-2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}(1-a)^3$$

ゆえに　　$S_2=\dfrac{1}{2}(1-a)\cdot\dfrac{4}{27}(1-a)^3=\dfrac{2}{27}(a-1)^4$

よって　　$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{2}{27}(a-1)^4\div\dfrac{1}{12}(a-1)^4=\dfrac{2}{27}\cdot 12=\dfrac{8}{9}$

参考　△PAB の面積 S が最大となるのは，点 P における C の接線が ℓ と平行になるときである。

また，数直線上の 3 点 $\mathrm{B}_1(a)$，$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)$，$\mathrm{A}_1(1)$ に対して，点 P_1 は線分 $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1$ を $1:2$ に内分する点であるから，$a<1$ より　　$a<\dfrac{2a+1}{3}<1$

$\boxed{2}$

[解答] (1) 2^{ab} 通り　(2) $2^{\frac{1}{2}ab}$ 通り　(3) $2^{\frac{1}{2}ab+1}-2^{\frac{1}{4}ab}$ 通り

(4) $2^{ab}-3\cdot 2^{\frac{1}{2}ab}+2^{\frac{1}{4}ab+1}$ 通り

(1) 長方形を構成する各正方形に対して，白色に塗るか黒色に塗るかの 2 通りがあるから，模様の総数は　2^{ab} 通り

(2) 点対称な模様の個数は，縦の辺の長さが a で横の辺の長さが $\frac{b}{2}$ の長方形の模様の総数に等しい。

よって，点対称な模様は　$2^{\frac{1}{2}ab}$ 通り

(3) 線対称には，長方形の縦の長さ $\frac{a}{2}$ の所で折り返した場合の線対称と，横の長さ $\frac{b}{2}$ の所で折り返した場合の線対称があり，それぞれの線対称について，模様は

$$2^{\frac{1}{2}ab} \text{ 通り}$$

また，長方形の縦の長さ $\frac{a}{2}$ の所で折り返したとき線対称であり，かつ横の長さ $\frac{b}{2}$ の所で折り返したとき線対称である模様の個数は，縦の辺の長さが $\frac{a}{2}$ で横の辺の長さが $\frac{b}{2}$ の長方形の模様の総数に等しい。

よって，そのような模様は　$2^{\frac{1}{4}ab}$ 通り

ゆえに，線対称な模様は　$2^{\frac{1}{2}ab}\times 2-2^{\frac{1}{4}ab}=2^{\frac{1}{2}ab+1}-2^{\frac{1}{4}ab}$ (通り)

(4) 点対称かつ線対称な模様は，長方形の縦の長さ $\frac{a}{2}$ の所で折り返したとき線対称で，かつ横の長さ $\frac{b}{2}$ の所で折り返したとき線対称な模様である。

よって，点対称かつ線対称な模様は　$2^{\frac{1}{4}ab}$ 通り

ゆえに，点対称でも線対称でもない模様は

$$2^{ab}-\left(2^{\frac{1}{2}ab}+2^{\frac{1}{2}ab+1}-2^{\frac{1}{4}ab}-2^{\frac{1}{4}ab}\right)=2^{ab}-3\cdot 2^{\frac{1}{2}ab}+2^{\frac{1}{4}ab+1} \text{ (通り)}$$

3

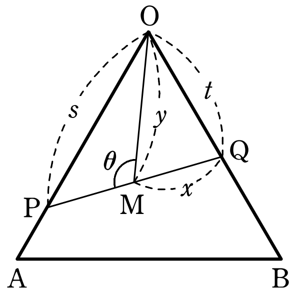
解答 (1) $\mathrm{PQ}=\sqrt{s^2+t^2-st}$ (2) $t=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\theta}$

(3) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{s^2+t^2+st}$ (4) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(1) 余弦定理により

$$\mathrm{PQ}^2=s^2+t^2-2st\cos 60^\circ=s^2+t^2-st$$

よって $\mathrm{PQ}=\sqrt{s^2+t^2-st}$



(2) △OQM に余弦定理を適用して

$$t^2=x^2+y^2-2xy\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=x^2+y^2+2xy\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

よって $t=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\theta}$

(3) M は PQ の中点であるから $\mathrm{PM}=x$

△OPM に余弦定理を適用して

$$s^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から $s^2+t^2=2x^2+2y^2$ よって $y^2=\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{1}{2}t^2-x^2 \quad \cdots\cdots ③$

一方，$\mathrm{PQ}=2x$ から $4x^2=\mathrm{PQ}^2$

よって $x^2=\dfrac{1}{4}\mathrm{PQ}^2=\dfrac{1}{4}(s^2+t^2-st)$

これを ③ に代入して $y^2=\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}(s^2+t^2-st)=\dfrac{1}{4}(s^2+t^2+st)$

ゆえに $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{s^2+t^2+st}$

(4) $s+t=1$ より $t=1-s$ であるから

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+(1-s)^2+s(1-s)}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2-s+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

P は辺 OA 上にあるから，$0<s<1$ である。

よって，y は $s=\dfrac{1}{2}\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。

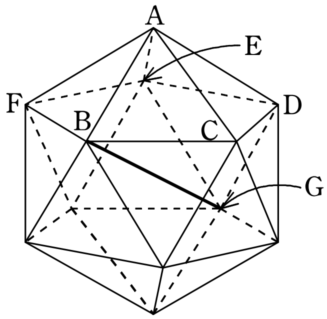
4

解答 (1) 12 個 (2) $R=\dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$，$\mathrm{BE}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (3) $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

(4) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{48}$

(1)　面の数は20，1つの面の頂点の数は3，1つの頂点に集まる面の数は5であるから，頂点の総数は

$$\frac{3\times20}{5}=12 \text{（個）}$$



(2)　正五角形BCDEFの外接円は△BEFの外接円と等しい。

∠BFEは正五角形の内角であるから

$$\angle\mathrm{BFE}=108^\circ$$

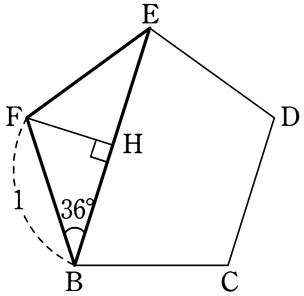
よって　　$\angle\mathrm{FBE}=\dfrac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$

ゆえに，△BEFにおいて正弦定理により

$$\frac{\mathrm{EF}}{\sin 36^\circ}=2R$$

よって　　$R=\dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

FからBEに下ろした垂線をFHとする。



$\sin^2 36^\circ=\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}$ であるから

$$\cos 36^\circ=\sqrt{1-\sin^2 36^\circ}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ゆえに　　$\mathrm{BE}=2\mathrm{BH}=2\mathrm{BF}\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

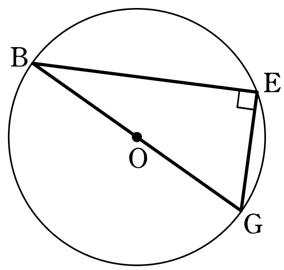
(3)　頂点B，E，Gは球Sの表面上にあり，BGは球Sの直径であるから，△BEGは直角三角形である。

EG＝1であるから

$$\mathrm{BG}^2=\mathrm{BE}^2+\mathrm{EG}^2$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1^2=\frac{10+2\sqrt{5}}{4}$$

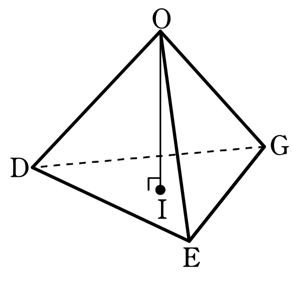
よって　　$\mathrm{BG}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$



(4)　△DEGの重心をIとすると，OIが三角錐ODEGの高さである。

GIは△DEGの外接円の半径であるから，正弦定理

により　　$\mathrm{GI}=\dfrac{1}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$\mathrm{OG}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BG}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ であるから

$$\mathrm{OI}^2=\mathrm{OG}^2-\mathrm{GI}^2=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{3}=\frac{14+6\sqrt{5}}{48}$$

$$=\frac{14+2\sqrt{45}}{48}=\frac{(3+\sqrt{5})^2}{48}$$

よって　　$\mathrm{OI}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$

また　　　$\triangle \mathrm{DEG}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$

したがって，三角錐 ODEG の体積は　　$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{5}}{48}$