〔3〕 以下の問いに答えよ。

(1) n を 2 以上の整数とする。実数係数の n 次方程式 $f(x)=0$ が虚数解 α をもつならば，α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $f(x)=0$ の解であることを示せ。

(2) n を正の整数とする。
半径 1 の円に内接する正 $2n+1$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots\cdots A_{2n-1}A_{2n}$ について，
n 個の線分の長さの積 $A_0A_1 \times A_0A_2 \times A_0A_3 \times \cdots\cdots \times A_0A_n$ を L とする。
複素数平面上で中心 O，半径 1 の円に内接する正 $2n+1$ 角形 $A_0A_1A_2\cdots\cdots A_{2n-1}A_{2n}$ を考えることで，L を求めよ。

---

(1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

とおく。 ($a_0 \sim a_n$：実数)

↑n次多項式のメジャーな立式

$f(x)=0$ の解が α であるとき，

$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha^1 + a_0 = 0$

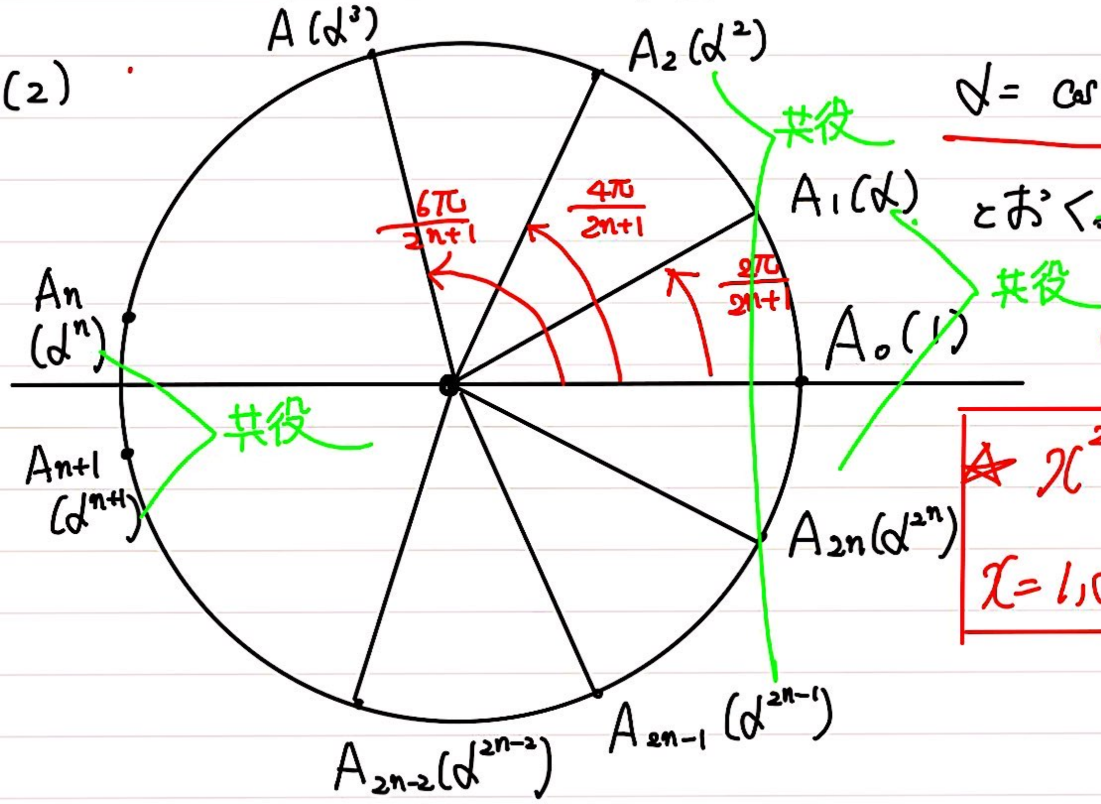
両辺の共役複素数を考え，$a_0 \sim a_n$ が実数であることから

$a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + a_{n-2}\overline{\alpha^{n-2}} + \cdots + a_2\overline{\alpha^2} + a_1\overline{\alpha^1} + a_0 = 0$

$a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{\alpha})^{n-2} + \cdots + a_2(\overline{\alpha})^2 + a_1(\overline{\alpha})^1 + a_0 = 0$

$\therefore\ f(\overline{\alpha}) = 0$ より，題意は示せた.

(2)



$\alpha = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{\pi}{2n+1}$

とおく。

$\alpha^{2n+1} = 1$ をみたす

$$\boxed{\begin{array}{l} ☆\ x^{2n+1} = 1 \text{ の解} \\ x = 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots \alpha^{2n} \end{array}}$$

$$\begin{cases} A_0A_1 = |1-\alpha| \\ A_0A_2 = |1-\alpha^2| \\ \quad\vdots \\ A_0A_n = |1-\alpha^n| \end{cases}$$

より．

$\because$ $\begin{cases} \overline{\alpha} = \alpha^n \\ \overline{\alpha^2} = \alpha^{n-1} \\ \quad\vdots \\ \overline{\alpha^n} = \alpha^{n+1} \end{cases}$ を用いるイメージ

$$L = |1-\alpha|\,|1-\alpha^2|\,|1-\alpha^3| \cdots |1-\alpha^{n-2}|\,|1-\alpha^{n-1}|\,|1-\alpha^n|$$

$$\begin{aligned} L^2 &= |1-\alpha|^2\,|1-\alpha^2|^2\,|1-\alpha^3|^2 \cdots |1-\alpha^{n-2}|^2\,|1-\alpha^{n-1}|^2\,|1-\alpha^n|^2 \\ &= (1-\alpha)(1-\underset{\alpha^{2n}}{\underset{\shortparallel}{\overline{\alpha}}})(1-\alpha^2)(1-\underset{\alpha^{2n-1}}{\underset{\shortparallel}{\overline{\alpha^2}}})(1-\alpha^3)(1-\underset{\alpha^{2n-2}}{\underset{\shortparallel}{\overline{\alpha^3}}}) \cdots (1-\alpha^{n-2})(1-\underset{\alpha^{n+3}}{\underset{\shortparallel}{\overline{\alpha^{n-2}}}})(1-\alpha^{n-1})(1-\underset{\alpha^{n+2}}{\underset{\shortparallel}{\overline{\alpha^{n-1}}}})(1-\alpha^n)(1-\underset{\alpha^{n+1}}{\underset{\shortparallel}{\overline{\alpha^n}}}) \\ &= (1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3) \cdots (1-\alpha^n)(1-\alpha^{n+1})(1-\alpha^{n+2}) \cdots (1-\alpha^{2n-2})(1-\alpha^{2n-1})(1-\alpha^{2n}) \end{aligned}$$

ここで $x^{2n+1}-1=0$ の解が $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{2n}$ より

$$x^{2n+1}-1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3) \cdots (x-\alpha^{2n-1})(x-\alpha^{2n}) \quad \cdots ①$$

また

$$x^{2n+1}-1 = (x-1)(x^{2n}+x^{2n+1}+x^{2n+2}+\cdots+x^2+x+1) \quad \cdots ③$$

①、③ より

$$x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1 = (x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)\cdots(x-\alpha^{2n})$$

$x=1$ を代入し

$$2n+1 = (1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots(1-\alpha^{2n}) = L^2$$

$$\therefore L = \sqrt{2n+1} \quad \cdots (答)$$

〔5〕 n を正の整数とし，$n!$ を 9 進法で表したときに末尾に並ぶ 0 の個数を $f(n)$ で表す。例えば，$10! = 3628800 = 6740700_{(9)}$ より，$f(10) = 2$ である。

(1) $f(8)$ および $f(6789)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) k を 0 以上の整数とする。$f(n) = k$ のとき，$4k < n$ を示せ。

(3) $f(n) = 1000$ を満たす最小の n を求めよ。

〈方針〉

一般的に，例えば「$n!$ を「9」で何回割れるか」と問われると
$9 = 3^2$ より，素因数に 3 がいくつ含まれるか，を数える。

$f(8) = 1$

∵
$8 \div 3^1 = \underline{2} \cdots 1$
$8 \div 3^2 = \underline{0} \cdots 1$
⇒ $\underline{2+0} = 2$(コ)
よって $8! = 3^2 \times ● = 9^{1} \times ●$

$f(6789) = 1695$

∵
$6789 \div 3 = \underline{2263} \cdots 0$
$6789 \div 3^2 = \underline{754} \cdots 3$
$6789 \div 3^3 = \underline{251} \cdots$
$6789 \div 3^4 = \underline{83} \cdots$
$6789 \div 3^5 = \underline{27} \cdots$
$6789 \div 3^6 = \underline{9} \cdots$
$6789 \div 3^7 = \underline{3} \cdots$
$6789 \div 3^8 = \underline{1} \cdots$
⇒ $2263 + 754 + 251 + 83 + 27 + 9 + 3 + 1 = 3391$(コ)
よって $6789! = 3^{3391} \times ●$
$= 3^{3390} \times 3^1 ●$
$= 9^{1695} \times 3^1 ●$

この数え方を作業としてやると，(2)以後はキツイ。

「割った商の和」ではなく，
各々，$\frac{6789}{3}, \frac{6789}{3^2}, \frac{6789}{3^3}, \cdots$ の整数部分
と解釈すると，[　]の和と考えられる

ガウス

3の素因数の個数（$n!$ の3の素因数の個数は、1〜nまでの上以下の○の数）

1群（1〜9）　2群（10〜18）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
3^1の倍数			○			○			○			○			○			○	← 3^1でわれる個数
3^2 〃									○									○	← 3^2でわれる回数
3^3 〃																			← 3^3でわれる回数
3^4 〃																			

⇒ この○の総数が $n!$ が3でわれる回数

$6!$で $3^2=9$　　$9!$で $3^4=9^2$　　$15!$で $3^6=9^3$　　$18!$で $3^8=9^4$

ここで、$n!$ について

1〜nまでで、3^1の倍数は $\left[\frac{n}{3^1}\right]$（コ）

〃　　3^2の倍数は $\left[\frac{n}{3^2}\right]$（コ）

〃　　3^3の倍数は $\left[\frac{n}{3^3}\right]$（コ）

⋮

であるので、$n! = 3^m \times N$（N：3と互いに素な自然数）とすると $m = \left[\frac{n}{3^1}\right] + \left[\frac{n}{3^2}\right] + \left[\frac{n}{3^3}\right] + \cdots$

と表せる

$① - 1 < [①] \leq ①$

本問で、全ての［ ］の等号が成立することはない（無限個アリ）

$$m = \left[\frac{n}{3^1}\right] + \left[\frac{n}{3^2}\right] + \left[\frac{n}{3^3}\right] \cdots < \underbrace{\frac{n}{3} + \frac{n}{3^2} + \frac{n}{3^3} + \cdots}_{\text{無限等比級数}}$$

$$= \frac{\frac{n}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{n}{2}$$

$$\therefore\ m < \frac{n}{2} \quad \cdots ①$$

また、$n!$ が9で何回われるかは、$n! = 3^m \times N = 9^{\frac{m}{2}} \times N$

であるので　$n!$ が 9 でわれる回数は　$\left[\frac{m}{2}\right]$

$$\therefore K = \left[\frac{m}{2}\right] \leqq \frac{m}{2} < \frac{n}{4} \qquad \text{(証明終)}$$

(3)　$f(n) = \underbrace{1000}_{K}$ より　$\underbrace{4000}_{4K} < n$

$n=4001$ のとき，$4001! = 3^m \times N$（N は 3 と互いに素な自然数）

$$m = \left[\frac{4001}{3}\right] + \left[\frac{4001}{3^2}\right] + \left[\frac{4001}{3^3}\right] + \left[\frac{4001}{3^4}\right] + \left[\frac{4001}{3^5}\right] + \left[\frac{4001}{3^6}\right] + \left[\frac{4001}{3^7}\right] + \underbrace{\left[\frac{4001}{3^8}\right] + \cdots}_{0}$$

$$= 1996$$

$$\therefore f(4001) = \left[\frac{1996}{2}\right] = 998$$

	4001	4002	4003	4004	4005	4006	4007	4008
3^1 の倍数		○			○			○
3^2					○			
3^3								
3^4								

○が 1996(コ)

2000(コ)

よって　$n=4008$ のとき　$f(4008) = \left[\frac{2000}{2}\right] = 1000$ となり
題意に適する