獨協医科対策1　　60分

1 (1)　ある自然数 N を 9 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(9)}$ になり，N の 2 倍を 3 進法で表すと 5 桁の数 $cbbaa_{(3)}$ になる。このとき，自然数 N を求めよう。

まず，$N=\boxed{アイ}a+\boxed{ウ}b+c$ ……①，$2N=\boxed{エ}a+\boxed{オカ}b+\boxed{キク}c$ ……②

が成り立つ。①，② から，a，b，c は方程式 $\boxed{ケコ}\left(\boxed{サ}a-c\right)=\boxed{シス}b$ を満たす。よって，$a=\boxed{セ}$，$b=\boxed{ソ}$，$c=\boxed{タ}$ であり，N を 10 進法で表すと，

$N=\boxed{チツ}$ である。

(2)　1512 の正の約数は全部で $\boxed{テト}$ 個ある。これらのうち，3 の倍数は $\boxed{ナニ}$ 個，9 の倍数は $\boxed{ヌネ}$ 個，27 の倍数は $\boxed{ノ}$ 個ある。

1512 のすべての正の約数の積を 3 進法で表すと，末尾には 0 が連続して $\boxed{ハヒ}$ 個並ぶ。

$\boxed{2}$ m を定数とする。直線 $x+my=2m+3$ は m の値に関わらず点 $\left(3,\ \boxed{\text{ア}}\right)$ を通る。また，この直線の x 切片は $\boxed{\text{イ}}m+\boxed{\text{ウ}}$ である。

次に，$m>0$ として，x，y が 4 つの不等式

$$x\geqq 0,\quad y\geqq 0,\quad x+3y\leqq 9,\quad x+my\leqq 2m+3$$

を同時に満たすときの $x+y$ の最大値を M とする。

(1) $m=\dfrac{1}{4}$ のとき，$M=\boxed{\text{エ}}$ である。$x+y=\boxed{\text{エ}}$ となるときの x，y の値は，$x=\boxed{\text{オ}}$，$y=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) m の値の範囲が $0<m\leqq\boxed{\text{キ}}$ のとき，m の値に関わらず $M=\boxed{\text{エ}}$ である。

m の値の範囲が $3<m$ のとき，m の値に関わらず $M=\boxed{\text{ク}}$ であり，$x+y=\boxed{\text{ク}}$ となるときの x，y の値は，$x=\boxed{\text{ケ}}$，$y=\boxed{\text{コ}}$ である。

m の値の範囲が $\boxed{\text{キ}}<m\leqq 3$ のとき，M の値は m の値によって変化する。このとき，M がとりうる整数値は $\boxed{\text{サ}}$ 個あり，M が最小の整数値をとるのは，$m=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のときである。

$\boxed{3}$ xy 平面上の曲線 C が，媒介変数 t を用いて

$$x=\cos 2t,\quad y=\sin 3t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されている。

(1) 曲線 C と y 軸の交点を P とするとき，曲線 C 上の点 P における接線の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}x+\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(2) 曲線 C と x 軸の交点は $(1,\ 0)$ および $\left(\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ 0\right)$ である。

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

4 O を原点とする座標空間の異なる 4 点 A，B，C，D に関して，図形 ABCD がひし形であるための必要十分条件として 適当でないもの を，次の ⓪～② のうちから 1 つ選べ。 $\boxed{\text{ア}}$

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$

① $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

② $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$

4 点の座標を A$(p,\ p,\ p)$，B$(2,\ -3,\ -1)$，C$(a,\ b,\ c)$，D$(1,\ 1,\ -2)$ とし，図形 ABCD はひし形であるとする。

このとき $p=\boxed{\text{イウ}}$，$a=\boxed{\text{エ}}$，$b=\boxed{\text{オ}}$，$c=\boxed{\text{カキ}}$ である。

この 4 点について，次の問いに答えよ。

(1) 平面 ABC 上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の両方に垂直なベクトル $\vec{n}=\left(1,\ -\boxed{\text{ク}},\ -\boxed{\text{ケ}}\right)$ に対して

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ が成り立つから，x，y，z は関係式

$$x-y-\boxed{\text{コ}}z=\boxed{\text{サシ}} \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たすことがわかる。

(2) E$(4,\ -3,\ -6)$ を頂点とし，ひし形 ABCD を底面とする四角錐 E－ABCD を考える。点 E から平面 ABC に垂線 EH を下ろし，点 H の座標を $(x',\ y',\ z')$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ と (1) の $\vec{n}$ は平行であるから，実数 k を用いて

$$x'=k+\boxed{\text{ス}},\quad y'=\boxed{\text{セ}}k-\boxed{\text{ソ}},\quad z'=\boxed{\text{タチ}}k-\boxed{\text{ツ}}$$

とおける。ここで，点 H は平面 ABC 上の点であるから $k=\boxed{\text{テト}}$ である。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boxed{\text{ナ}}$ と表されるから，点 H は $\boxed{\text{ニ}}$ にある。

また，四角錐 E－ABCDの体積は $\boxed{\text{ヌネ}}$ である。

$\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものは，次の各解答群のうちから 1 つずつ選べ。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　① $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　② $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　③ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ ひし形 ABCD の内部　① ひし形 ABCD の周上　② ひし形 ABCD の外部