獨協医科対策1　60分

1 解答　(アイ)　81　(ウ)　9　(エ)　4　(オカ)　36　(キク)　81　(ケコ)　79
(サ)　2　(シス)　18　(セ)　1　(ソ)　0　(タ)　2　(チツ)　83
(テト)　32　(ナニ)　24　(ヌネ)　16　(ノ)　8　(ハヒ)　48

(1)　N を 9 進法で表すと $abc_{(9)}$ であるから

$$N=a\cdot 9^2+b\cdot 9^1+c\cdot 9^0=81a+9b+c \quad \cdots\cdots ①$$

N の 2 倍を 3 進法で表すと $cbbaa_{(3)}$ であるから

$$2N=c\cdot 3^4+b\cdot 3^3+b\cdot 3^2+a\cdot 3^1+a\cdot 3^0=4a+36b+81c \quad \cdots\cdots ②$$

①×2−② から　$158a-18b-79c=0$　よって　$79(2a-c)=18b$

79 と 18 は互いに素であるから，b は 79 の倍数。

ここで，$abc_{(9)}$ は 3 桁の 9 進数であり，$cbbaa_{(3)}$ は 5 桁の 3 進数であるから，a，c は 1 または 2，b は 0 または 1 または 2 である。

したがって　$b=0$

ゆえに　$2a-c=0$　すなわち　$2a=c$

a，c は 1 または 2 であるから　$a=1$，$c=2$

したがって　$N=81\cdot 1+9\cdot 0+2=83$

(2)　$1512=2^3\cdot 3^3\cdot 7$ であるから，1512 の正の約数は全部で

$$(3+1)(3+1)(1+1)=4\cdot 4\cdot 2=32 \ (個)$$

これらのうち，3 の倍数は素因数 3 を 1 個以上含むものであり，その個数は $2^3\cdot 3^2\cdot 7$ の正の約数の個数と等しいから　$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24$ (個)

同様に，9 の倍数の個数は $2^3\cdot 3\cdot 7$ の正の約数の個数と等しいから

$$(3+1)(1+1)(1+1)=4\cdot 2\cdot 2=16 \ (個)$$

27 の倍数の個数は $2^3\cdot 7$ の正の約数の個数と等しいから　$(3+1)(1+1)=4\cdot 2=8$ (個)

また，1512 のすべての正の約数の積 M を 3 進法で表したとき，末尾に連続して並ぶ 0 の個数は，M を素因数分解したときの素因数 3 の個数と等しい。

1512 の正の約数のうち，3 の倍数は 24 個，9 の倍数は 16 個，27 の倍数は 8 個であり，81 の倍数はないから，求める個数は　$24+16+8=48$ (個)

参考　$1512=2^3\cdot 3^3\cdot 7$ のすべての正の約数の積 M を求めると

$$M=2^{3\cdot 4\cdot 2+2\cdot 4\cdot 2+1\cdot 4\cdot 2}\cdot 3^{4\cdot 3\cdot 2+4\cdot 2\cdot 2+4\cdot 1\cdot 2}\cdot 7^{4\cdot 4\cdot 1}=2^{48}\cdot 3^{48}\cdot 7^{16}$$

2 解答　(ア) 2　(イ) 2　(ウ) 3　(エ) 5　(オ) 3　(カ) 2　(キ) 1

(ク) 9　(ケ) 9　(コ) 0　(サ) 4　$\dfrac{(\text{シ})}{(\text{ス})}$　$\dfrac{3}{2}$

$x+my=2m+3$ …… ① とする。

① を m について整理すると　$(y-2)m+x-3=0$　…… ①′

m の値に関わらず ①′ が成り立つための条件は　$y-2=0$　かつ　$x-3=0$

ゆえに　$x=3$，$y=2$

よって，直線 ① は m の値に関わらず点 $(3,\ 2)$ を通る。

また，① に $y=0$ を代入すると　$x=2m+3$

ゆえに，直線 ① の x 切片は　$2m+3$

次に，与えられた 4 つの不等式が表す領域を D とし，$x+3y=9$ …… ② とすると，直線 ② は点 $(3,\ 2)$ を通る。

$x+y=k$ …… ③ とおくと，$y=-x+k$ より，③ は傾き -1，y 切片 k の直線を表す。

直線 ③ が領域 D と共有点をもつような k の最大値が M である。

(1)　$m=\dfrac{1}{4}$ のとき，① は　$x+\dfrac{1}{4}y=\dfrac{7}{2}$

すなわち　$y=-4x+14$

よって，このときの領域 D は図 [1] の斜線部分である。

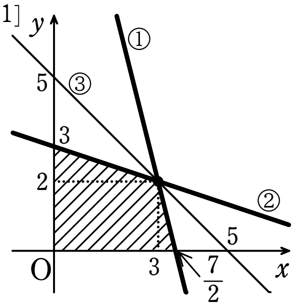
ただし，境界線を含む。

図 [1] から，k の値は，直線 ③ が点 $(3,\ 2)$ を通るとき最大となる。

ゆえに，$M=5$ であり，このときの x，y の値は

$x=3$，$y=2$

[1]



(2)　$m>0$ であるから，直線 ① の x 切片 $2m+3$ について　$2m+3>3$

図 [2] から，$3<2m+3\leqq 5$ のとき，m の値に関わらず $M=5$ となる。

$2m+3\leqq 5$ から　$2m\leqq 2$　よって　$m\leqq 1$

ゆえに，$0<m\leqq 1$ のとき，m の値に関わらず $M=5$ である。

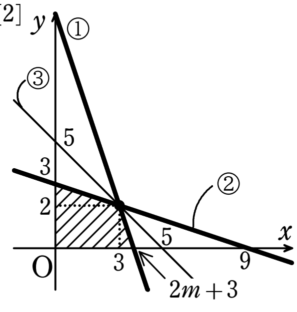
また，$3<m$ のとき　$9<2m+3$

このとき，図 [3] から，k の値は，直線 ③ が点 $(9,\ 0)$ を通るとき最大となる。

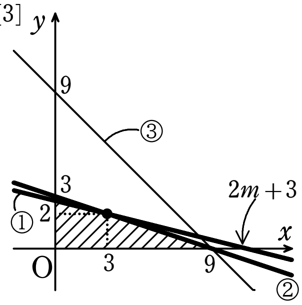
ゆえに，$3<m$ のとき，m の値に関わらず $M=9$ であり，このときの x，y の値は

$x=9$，$y=0$

[2]



[3]



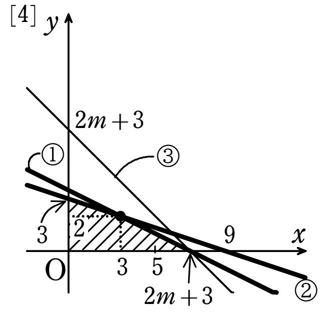
$1 < m \leqq 3$ のとき，図 [4] から，k の値は，直線 ③ が点 $(2m+3,\ 0)$ を通るとき最大となる。このとき

$$M = 2m+3$$

$1 < m \leqq 3$ より，$5 < 2m+3 \leqq 9$ であるから，M がとりうる整数値は

$$6,\ 7,\ 8,\ 9$$

の 4 個あり，$M=6$ のとき $2m+3=6$ から　　$m=\dfrac{3}{2}$



3 解答　(ア) 3　(イ) 2　(ウ) 4　(エ) 2　(オ) 2　(カキ) -1　(ク) 2
(ケ) 3　(コ) 5　(サ) 5

(1) Pの x 座標を α とおくと　$\cos 2\alpha=0$

$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq 2\alpha\leqq\pi$ であるから　$2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

これを解くと　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ここで，$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin 2t$，$\dfrac{dy}{dt}=3\cos 3t$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\cos 3t}{-2\sin 2t}$

$t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\cos\frac{3}{4}\pi}{-2\sin\frac{\pi}{2}}=\dfrac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{-2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

よって，接線の方程式は　$y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x$　すなわち　$y=\dfrac{{}^{ア}3\sqrt{{}^{イ}2}}{{}^{ウ}4}x+\dfrac{\sqrt{{}^{エ}2}}{{}^{オ}2}$

(2) $y=0$ とすると　$\sin 3t=0$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq 3t\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$3t=0,\ \pi$

よって　$t=0,\ \dfrac{\pi}{3}$

$t=0$ のとき，$\cos 0=1$ であるから交点の1つは $(1,\ 0)$ である。

$t=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$x=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

したがって，もう一方の交点は　$\left(\dfrac{{}^{カキ}-1}{{}^{ク}2},\ 0\right)$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=-2\sin 2t$，$\dfrac{dy}{dt}=3\cos 3t$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}\frac{\cos 3t}{\sin 2t}\quad ただし，t\neq 0,\ \frac{\pi}{2}$$

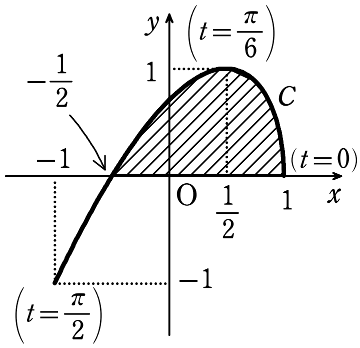
$\dfrac{dy}{dx}=0$ とすると，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<3t<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3t=\frac{\pi}{2}\quad すなわち\quad t=\frac{\pi}{6}$$

よって，x，y の増減は次の表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$	$\swarrow$	$(-1,\ -1)$

よって，グラフの概形は右の図のようになる。
曲線 C と x 軸で囲まれた部分は右の図の
斜線部分であるから，求める面積を S とおくと



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} y\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \sin 3t\cdot(-2\sin 2t)\,dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 3t\sin 2t\,dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\cos t-\cos 5t)\,dt$$

$$=\left[\sin t-\frac{1}{5}\sin 5t\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{5}\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{{}^{\text{ケ}}3\sqrt{{}^{\text{コ}}5}}{{}^{\text{サ}}5}$$

4 解答　(ア)　②　(イウ)　-2　(エ)　5　(オ)　0　(カキ)　-1　(ク)　1
(ケ)　5　(コ)　5　(サシ)　10　(ス)　4　(セ)　$-$　(ソ)　3　(タチ)　-5
(ツ)　6　(テト)　-1　(ナ)　②　(ニ)　①　(ヌネ)　27

⓪　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のとき，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ かつ $\mathrm{AD}/\!/\mathrm{BC}$ である。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ のとき，$\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}$ であるから，図形 ABCD は平行四辺形であり，かつ対角線が垂直に交わる。

よって，このとき図形 ABCD はひし形である。

①　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ のとき，図形 ABCD は平行四辺形であり，かつ隣り合う 2 辺の長さが等しいから，平行四辺形 ABCD の 4 辺の長さは等しい。

よって，このとき図形 ABCD はひし形である。

②　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$ のとき，4 点 A，B，C，D は同じ平面上にあるとは限らないから，図形 ABCD はひし形であるとはいえない。

(例えば，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$ を満たす図形 ABCD として，正四面体 ABCD がある。)

以上から，図形 ABCD がひし形であるための必要十分条件として適当でないものは　②

次に，$\mathrm{A}(p,\ p,\ p)$，$\mathrm{B}(2,\ -3,\ -1)$，$\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$，$\mathrm{D}(1,\ 1,\ -2)$ に対し，

図形ABCD がひし形のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から

$$(1-p,\ 1-p,\ -2-p)=(a-2,\ b+3,\ c+1)$$

ゆえに　$a=3-p$，$b=-2-p$，$c=-3-p$　……①

また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ から　$(a-p,\ b-p,\ c-p)\cdot(-1,\ 4,\ -1)=0$

よって　$p-a+4(b-p)+p-c=0$　すなわち　$a-4b+c+2p=0$　……②

② に ① を代入して　$3-p-4(-2-p)+(-3-p)+2p=0$

整理すると　$4p+8=0$　ゆえに　$p=-2$

これを ① に代入して　$a=5$，$b=0$，$c=-1$

したがって　$\mathrm{A}(-2,\ -2,\ -2)$，$\mathrm{C}(5,\ 0,\ -1)$

別解　解答では，(ア) の選択肢 ⓪ の条件を用いて，p，a，b，c を求めたが，選択肢 ① の条件を用いて求めることもできる。

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ から　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$

よって　$(2-p)^2+(-3-p)^2+(-1-p)^2=(1-p)^2+(1-p)^2+(-2-p)^2$

整理すると　$4p+8=0$　ゆえに　$p=-2$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a+2,\ b+2,\ c+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(3,\ 3,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ から　$a+2=7$，$b+2=2$，$c+2=1$

よって　$a=5$，$b=0$，$c=-1$

(1)　$\vec{n}=(1,\ -l,\ -m)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(3,\ 3,\ 0)$ であるから，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より　$4+l-m=0$　……③

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$ より　$3-3l=0$　……④

③，④ から　$l=1,\ m=5$　よって　$\vec{n}=(1,\ -1,\ -5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+2,\ y+2,\ z+2)$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ より　$x+2-(y+2)-5(z+2)=0$

ゆえに　$x-y-5z=10$　……(*)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EH}}\,/\!/\,\vec{n}$ より，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EH}}=k\vec{n}$ と表すことができるから

$$(x'-4,\ y'+3,\ z'+6)=(k,\ -k,\ -5k)$$

よって　$x'=k+4,\ y'=-k-3,\ z'=-5k-6$

ここで，点 H は平面 ABC 上の点であるから，(*) より

$$k+4-(-k-3)-5(-5k-6)=10$$　整理すると　$27k+27=0$

ゆえに　$k=-1$

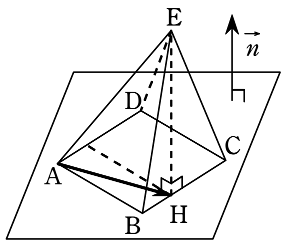
このとき H$(3,\ -2,\ -1)$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(5,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (s，t は実数) とおくと　$(5,\ 0,\ 1)=s(4,\ -1,\ 1)+t(3,\ 3,\ 0)$

ゆえに　$5=4s+3t,\ 0=-s+3t,\ 1=s$　これを解くと　$s=1,\ t=\dfrac{1}{3}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ (②) であるから，点 H は

ひし形 ABCD の辺 BC 上にある。(①)



また，四角錐 E－ABCD において，ひし形 ABCD を底面とみると，高さは EH である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(7,\ 2,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-1,\ 4,\ -1)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{7^2+2^2+1^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

ゆえに，ひし形 ABCDの面積は　$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{6}\cdot3\sqrt{2}=9\sqrt{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{EH}}=(-1,\ 1,\ 5)$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{EH}}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+5^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

したがって，四角錐 E－ABCDの体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot9\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}=27$